



# Corso di Idraulica

Prof. A. Balzano

ESERCITAZIONE N°2

IDROSTATICA

- SPINTE SU SUPERFICI GOBBE
- METODO PER COMPONENTI

# Spinte idrostatiche (superfici gobbe)

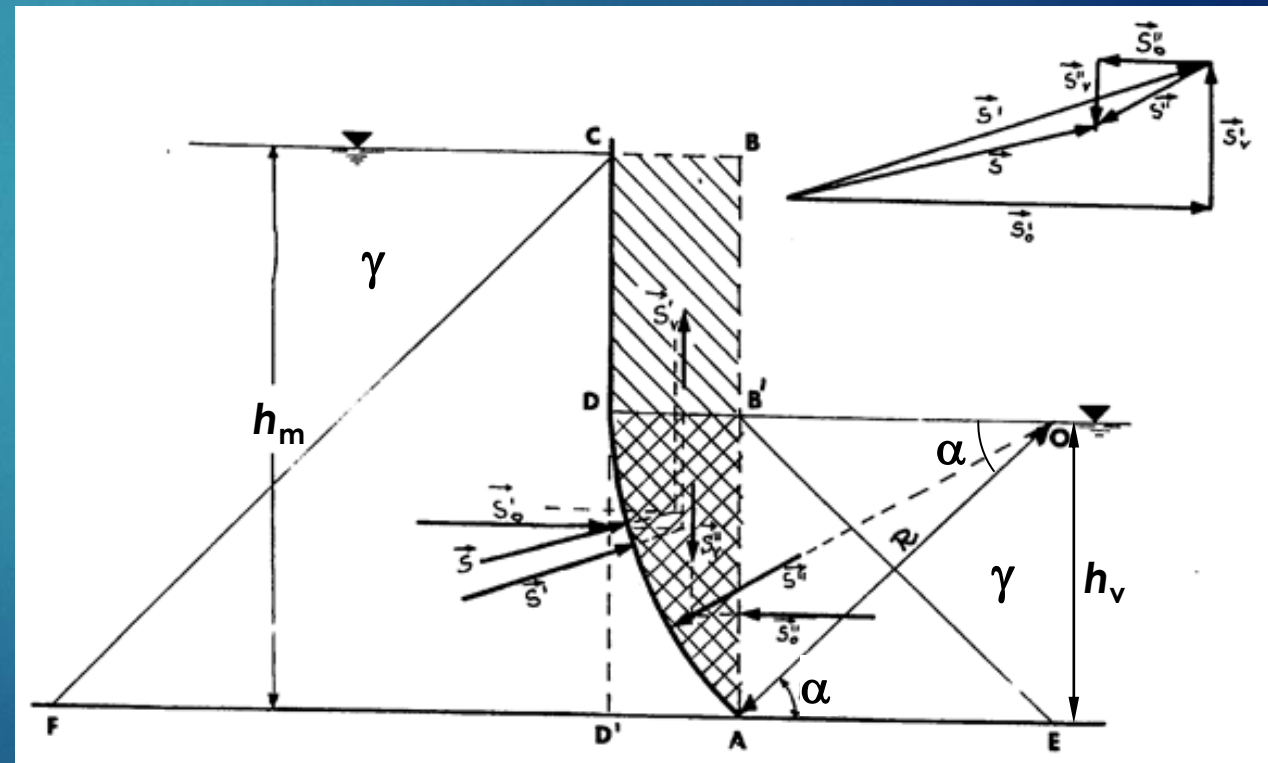
La paratoia a settore ADC in Figura sbarra un canale di sezione trasversale rettangolare, contenente acqua limpida in quiete. Sono assegnati il raggio  $R$  dell'arco di circonferenza costituente la sezione retta della paratoia, la larghezza  $b$  della paratoia, la profondità  $h_m$  dell'acqua a monte di essa e l'angolo  $\alpha$  che la congiungente il punto A al centro O del profilo circolare della paratoia forma con l'orizzontale.

Determinare la spinta  $\vec{S}$  che viene esercitata sulla paratoia, trascurando nei calcoli lo spessore della parete di tenuta.

Verificare che la retta d'azione della spinta esercitata dal solo liquido a valle della paratoia passi per il centro O del profilo circolare della paratoia.

Dati:

– $R = 7,00 \text{ m};$	– $h_m = 7,00 \text{ m};$	– $\alpha = 45^\circ$
– $b = 7,00 \text{ m};$	– $\gamma = 9806 \text{ Nm}^{-3}$	

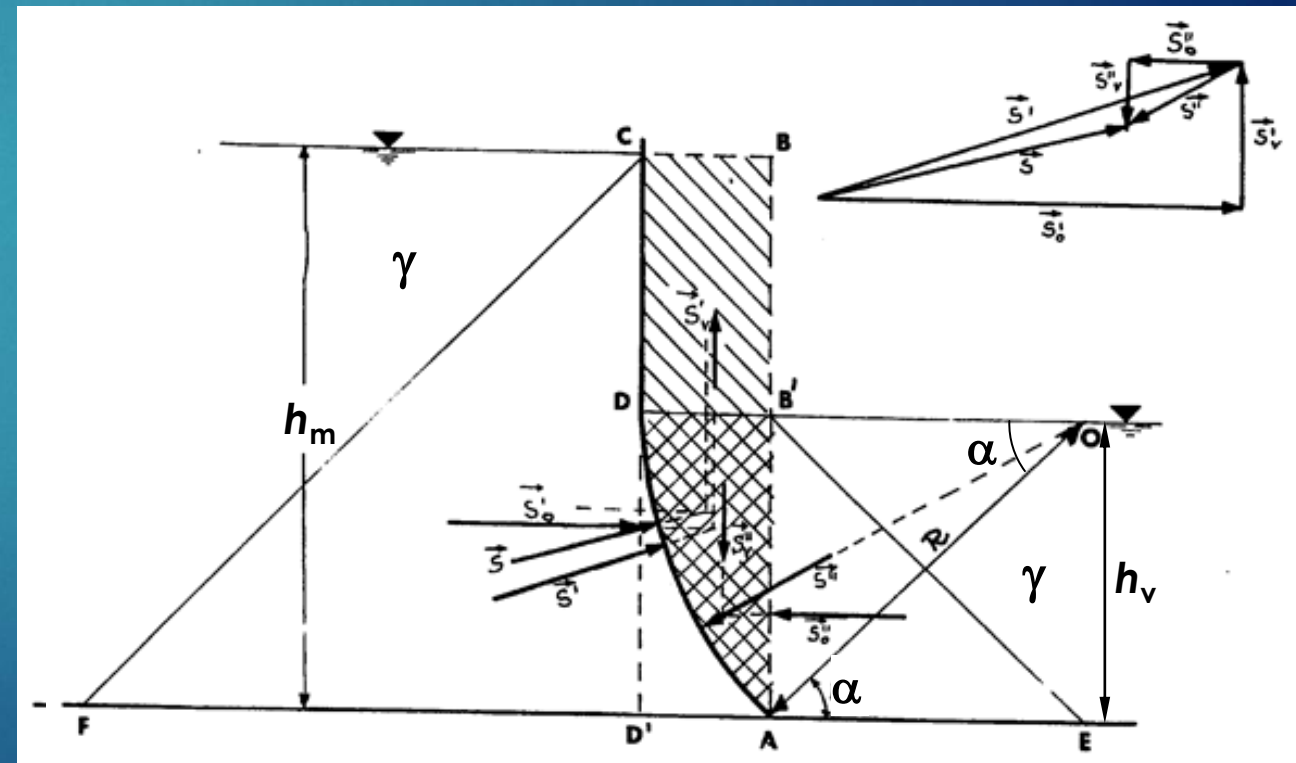


# Spinte idrostatiche (superfici gobbe)

- Profondità a valle della paratoia

$$h_v = R \sin \alpha$$

- Spinta  $\vec{S}$  risultante delle spinte  $\vec{S}'$  e  $\vec{S}''$  esercitate sulle facce della paratoia rivolte rispettivamente verso monte e verso valle
- Metodo di calcolo per componenti
  - Orizzontali: spinte su superfici piane proiettate in direzione x e y
    - ✓ Paratoia cilindrica  $\longrightarrow$  solo  $\vec{S}'_o$  e  $\vec{S}''_o$
  - Verticale: peso del volume compreso fra la superficie e il p.c.i. del liquido che esercita la spinta, immaginato riempito del liquido
    - ✓ Versi dei componenti determinati da analisi delle spinte elementari



# Spinte idrostatiche (superfici gobbe)

## ► Componenti orizzontali

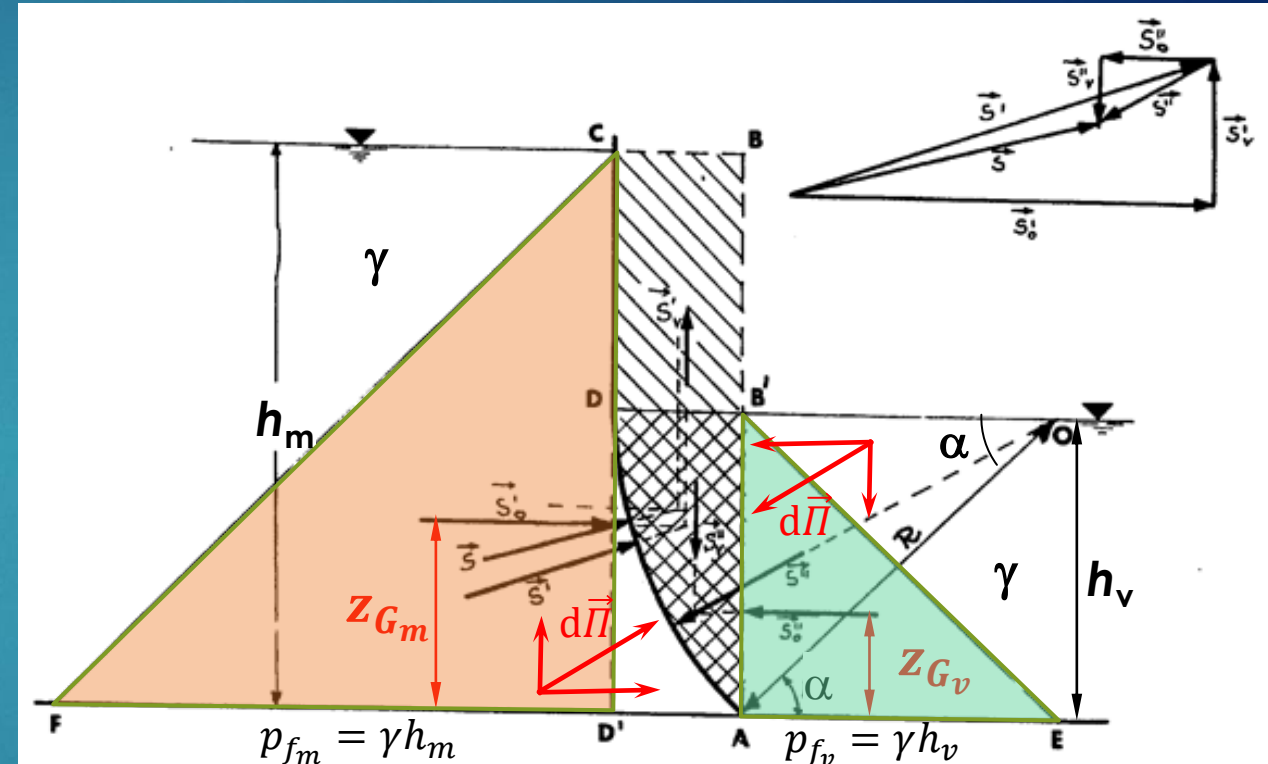
- Le proiezioni delle superfici premute nella direzione dell'asse del canale sono rettangoli contenuti in piani verticali di base  $b$  (larghezza canale) e altezze  $h_m$  e  $h_v$  (facce verso monte e verso valle)
- È agevole applicare il metodo del prisma di spinta (a sezione triangolare)

- Moduli e versi dei componenti orizzontali

– Monte  $S'_o = \frac{1}{2} \gamma h_m^2 b$   $s_x \rightarrow dx$

– Valle  $S''_o = \frac{1}{2} \gamma h_v^2 b$   $dx \rightarrow s_x$

- $\vec{S}'_o$  e  $\vec{S}''_o$  applicate nei baricentri dei prismi
- ✓ Baricentri su piani di simmetria dei prismi (piano verticale di mezzeria del canale)



- Quote dei baricentri delle sezioni triangolari dei prismi di spinta sul fondo del canale

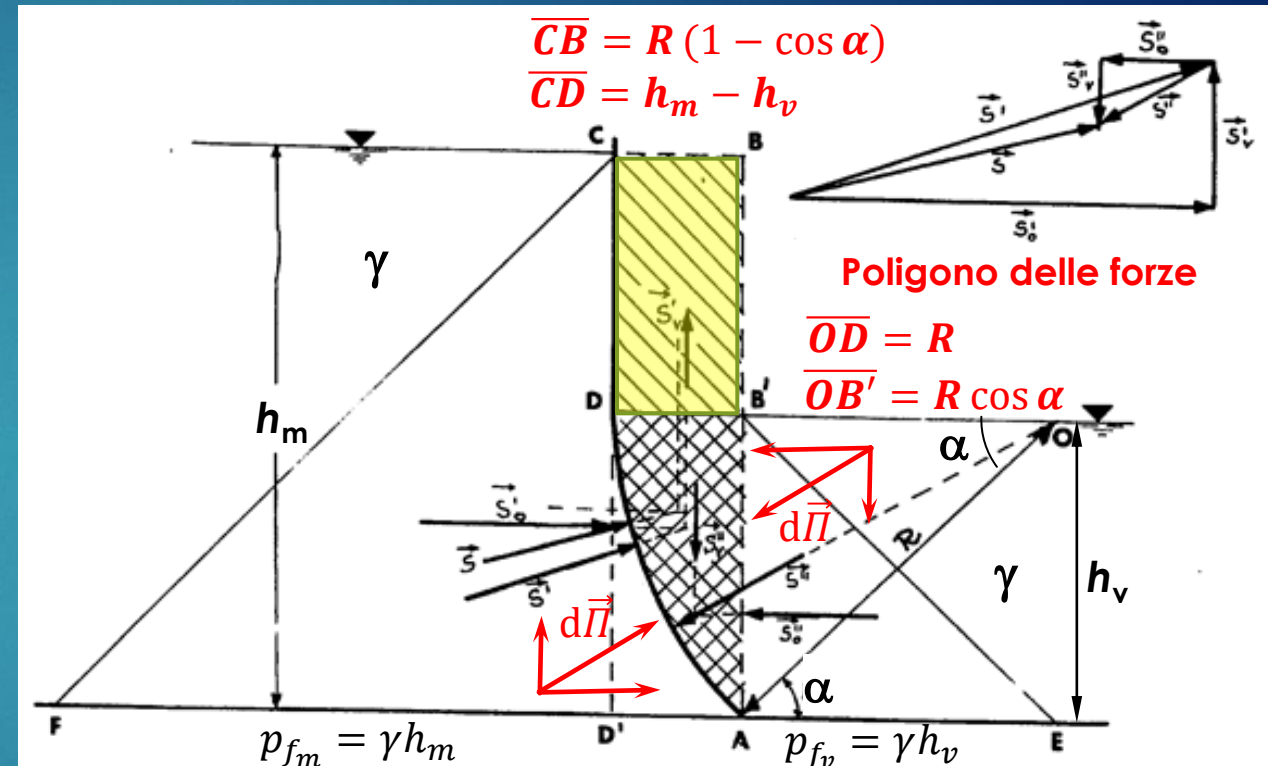
$$Z_{G_m} = \frac{1}{3} h_m \quad Z_{G_v} = \frac{1}{3} h_v$$



# Spinte idrostatiche (superfici gobbe)

## ► Componenti verticali

- $|\vec{S}'_v| = S'_v =$  peso del volume prismatico di sezione AB'BCDA e larghezza  $b$ , immaginato riempito di acqua
  - ✓ componente rivolto verso l'alto
- $|\vec{S}''_v| = S''_v =$  peso del volume prismatico di acqua di sezione AB'DA e larghezza  $b$ 
  - ✓ componente rivolto verso il basso
- $\vec{S}_v = \vec{S}'_v + \vec{S}''_v$  ;  $S_v = S'_v - S''_v$
- I contributi del volume AB'DA si elidono (spessore della parete trascurabile)
- $S_v =$  peso del volume prismatico di sezione B'BCDB' e larghezza  $b$
- $\vec{S}_v$  rivolto verso l'alto



- $\vec{S}_v$  applicato nel baricentro del volume prismatico di sezione B'BCDB' e larghezza  $b$
- Baricentro su piano di simmetria del prisma (piano verticale di mezz'aria del canale), nel centro di figura del rettangolo B'BCDB' (punto intersezione diagonali)

# Spinte idrostatiche (superfici gobbe)

## ► Modulo e direzione di $\vec{S}$

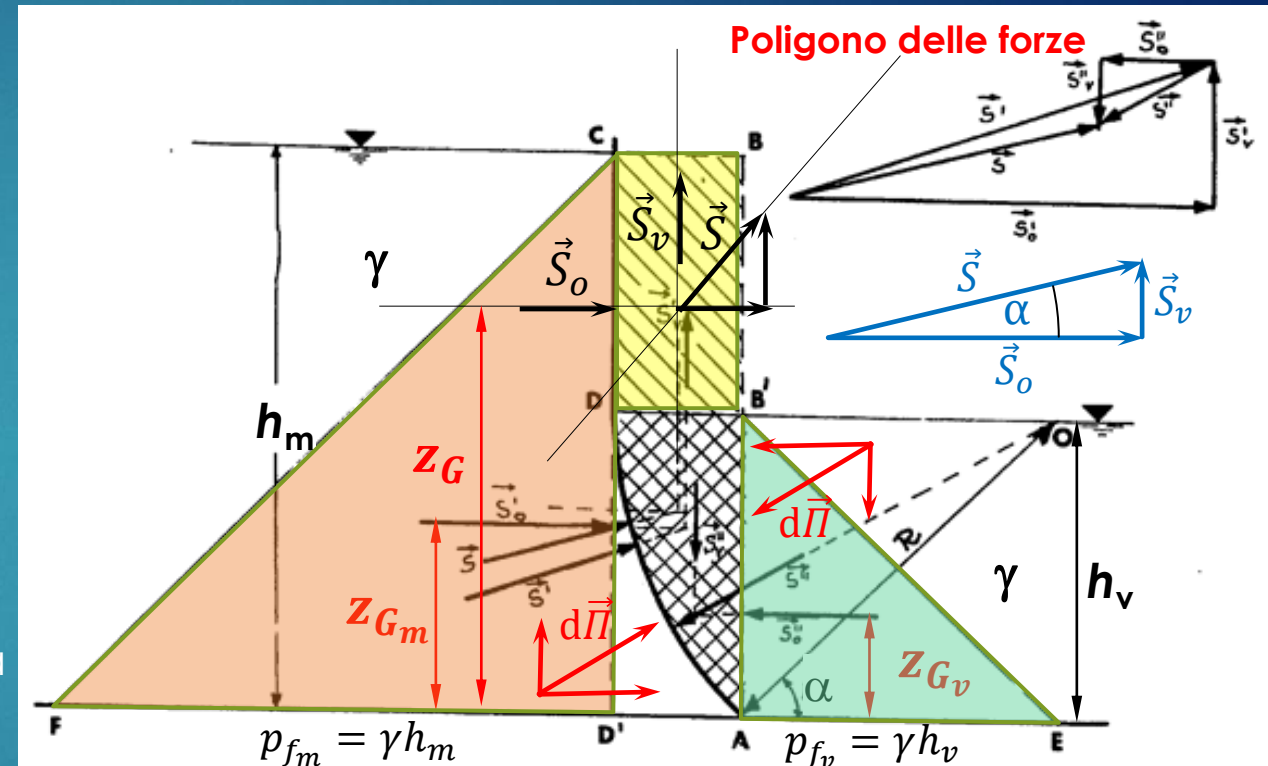
- $\vec{S} = \vec{S}'_o + \vec{S}''_o + \vec{S}'_v + \vec{S}''_v = \vec{S}_o + \vec{S}_v$
- $\vec{S}_o = \vec{S}'_o + \vec{S}''_o$  ;  $S_o = S'_o - S''_o$  ;  $dx \rightarrow dx$
- $S = (S_o^2 + S_v^2)^{1/2}$  ;  $\tan \alpha = S_v/S_o$

## ► Punto di applicazione di $\vec{S}$

- $\vec{S}_v$  applicato in baricentro rettangolo B'BCDB'
- $\vec{S}'_o$  e  $\vec{S}''_o$  applicati in baricentri triangoli di spinta
- Coordinata  $z_G$  del punto di applicazione di  $\vec{S}_o$  (uguaglianza dei momenti rispetto a polo A)

$$S_o z_G = S'_o z_{G_m} - S''_o z_{G_v}$$

$$z_G = \frac{S'_o z_{G_m} - S''_o z_{G_v}}{S_o}$$

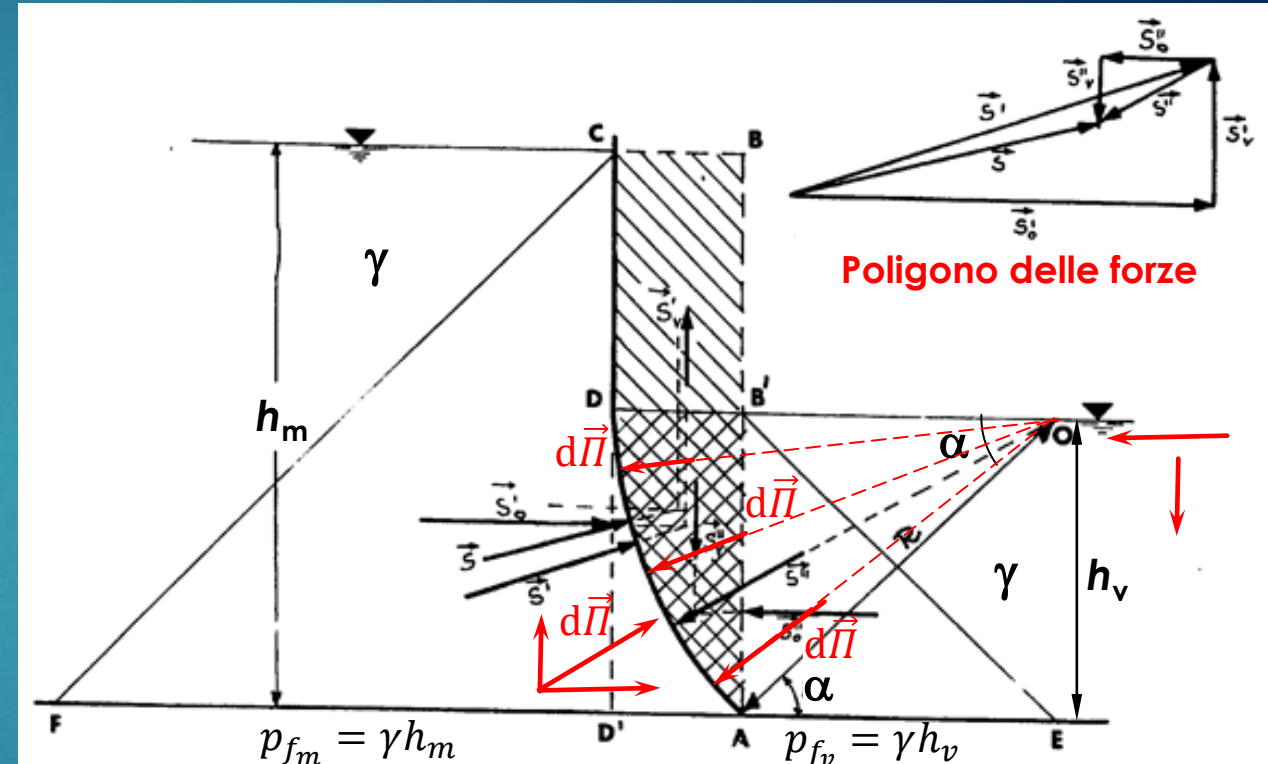


- ✓  $z_G > z_{G_m} > z_{G_v}$  (da verifica momenti rispetto a un polo posto sulla retta d'azione di  $S''_o$ )
- ✓  $\vec{S}$  applicata sulla verticale passante per il baricentro del prisma di sezione di B'BCDB', alla quota  $z_G$
- ✓  $\vec{S}$  può scorrere lungo la propria retta d'azione

# Spinte idrostatiche (superfici gobbe)

## ► Punto di applicazione di $\vec{S}''$

- $\vec{S}''$  = risultante della distribuzione di forze elementari di pressione sulla parte della paratoia cilindrica a sezione di arco di circonferenza
  - ✓ Le forze elementari sono ortogonali alla superficie cilindrica a sezione di arco di circonferenza
  - ✓ Le rette d'azione delle forze elementari passano per il centro della circonferenza
  - ✓ Il momento risultante della distribuzione continua di forze elementari, calcolato rispetto al centro della circonferenza è nullo
  - ✓ La risultante  $\vec{S}''$  deve possedere uguale momento rispetto a uno stesso polo
  - ✓  $\vec{S}''$  deve essere applicata nel centro della circonferenza verso il basso



## ► Verifica del punto di applicazione

- A partire dai punti di applicazione di  $\vec{S}''_o$  e  $\vec{S}''_v$ ,
- Scorrimento forze fino a punto di intersezione rette di azione
- Composizione delle forze  $\vec{S}'' = \vec{S}''_o + \vec{S}''_v$
- Scorrimento della risultante lungo la propria retta d'azione



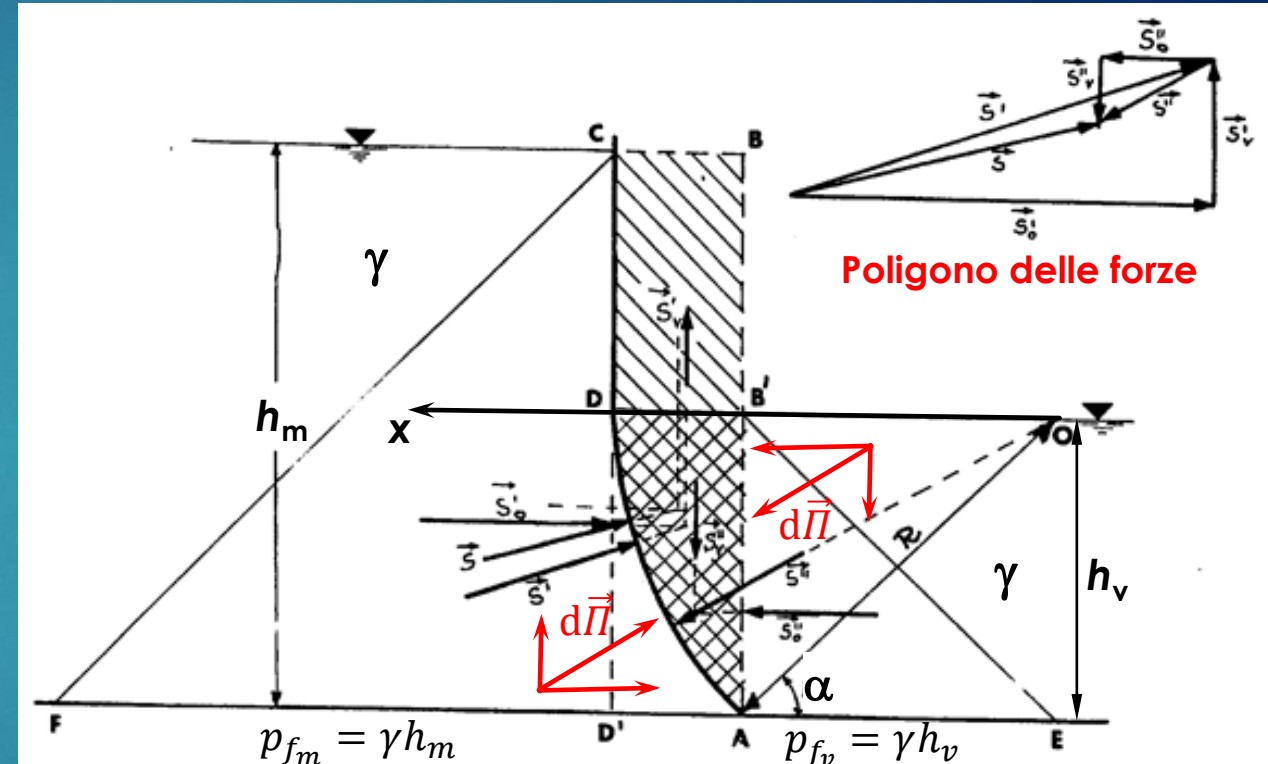
# Spinte idrostatiche (superfici gobbe)

## ► Punto di applicazione di $\vec{S}_v''$

- $\vec{S}_v''$  è applicato sul piano di simmetria del volume prismatico di sezione AB'DA, nel baricentro della figura di sezione
- La figura è AB'DA si ottiene come differenza fra il settore circolare OADO e il triangolo rettangolo AOB'A
- Date le coordinate  $x_{G_{OADO}}$  e  $x_{G_{AOB'A}}$  dei baricentri delle due figure, la coordinata  $x$  del baricentro di AB'DA si ottiene dalla:

$$x_{G_{AB'DA}} = \frac{A_{OADO} x_{G_{OADO}} - A_{AOB'A} x_{G_{AOB'A}}}{(A_{OADO} - A_{AOB'A})}$$

- ✓ La coordinata orizzontale è l'unica rilevante ( $\vec{S}_v''$  può scorrere lungo la propria retta d'azione verticale)



## ► Punto di applicazione di $\vec{S}_v'$

- Ragionando analogamente:

$$x_{G_{AB'BCDA}} = \frac{A_{AB'DA} x_{G_{AB'DA}} + A_{B'BCD} x_{G_{B'BCD}}}{(A_{AB'DA} + A_{B'BCD})}$$